数理解析研究所講究録
255巻 1975年 42-56

逆問題と正準変換

名大 理　　児玉裕治

§序

Soliton解をもつ、非線形分散型方程式の初期値問題を、exactに解く方法の1つに、逆散乱法があることは、よく知られている。近年、Ablowitz等[1]は、逆散乱法で解けうる方程式のクラスを、systematicに議論した。このクラスには、Korteweg de Vries方程式、変形Korteweg de Vries方程式、非線形Schrödinger方程式等が含まれる。これらの方程式に、共通な、注目すべき性質として、無限個の保存量の存在がある。Zakharov等[2,3]は、このことに関連して、KdV方程式、非線形Schrödinger方程式~~等~~、は、完全積分可能なHamiltonian Systemであることを示した。有限自由度NのHamiltonian Systemでは、互いにinvolutionにあるNコの保存量の存在は、系が完全積分可能であることの必要十分条件である(Liouvilleの定理)、が、ここで、

考えているような無限次元の系については、無限個の保存量の存在は、系が完全積分可能である為の必要条件のみを与え、一般に、完全積分可能であることを証明することはできない。しかし、逆散乱問題で解きうるという性質を用いることで、一般的に、これらの方程式（Ablowitz 等の示した逆散乱法で解くことのできる方程式）が、完全積分可能であることが示せる。

ここでは、逆散乱 Scheme を Ablowitz 等の提出したもの[1]を使い、この Scheme から得られる、非線形方程式を、Hamiltonian System として定義し、一般的に、この System が完全積分可能であることを示す。このとき 逆散乱 Scheme は、正準変換であることが示され、初期値問題は、単に、正準変数の 1 parameter t の action として考えられる。

§1 Ablowitz 等の散乱 Scheme と散乱問題。

Potential $q(x,t)$, $r(x,t)$ をもつ 1次元 Dirac 型 op. についての散乱問題。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\xi\varphi_1 &= q(x,t)\,\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i\xi\varphi_2 &= r(x,t)\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

を考える。Ablowitz 等は、φ_1, φ_2 についての時間発展を

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= A\varphi_1 + B\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= C\varphi_1 - A\varphi_2\end{aligned}\right) \qquad (2)$$

の形で定義し、(1),(2)式間のintegrability conditionをつかって$A(x,t,\xi)$, $B(x,t,\xi)$, $C(x,t,\xi)$の間の関係より、q、rについての非線形方程式を得た。　まず、(1)式の散乱問題を考える為に、次のJost関数を定義する。　for real ξ

$$\left.\begin{aligned}f(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{f}(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} e^{i\xi x}\end{aligned}\right) \quad \text{as} \quad x \to -\infty \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}g(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{g}(x,t,\xi) &\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\xi x}\end{aligned}\right) \quad \text{as} \quad x \to \infty \qquad (4)$$

このとき、f、gは又、次のように表わせる。

$$\left.\begin{aligned}f_1(x,\xi) &= e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\xi(x-s)} q(s) f_2(s,\xi)\, ds \\ f_2(x,\xi) &= \int_{-\infty}^{x} e^{i\xi(x-s)} r(s) f_1(s,\xi)\, ds\end{aligned}\right) \qquad (5)$$

$$g_1(x,\xi) = -\int_{x}^{\infty} e^{-i\xi(x-s)} q(s) g_2(s,\xi)\, ds \quad \Big) \qquad (6)$$

$$g_2(x,\xi) = e^{i\xi x} - \int_x^\infty e^{i\xi(x-s)} r(s) g_1(s,\xi)\,ds \quad)$$

又，g，$\overline{g}$ は (1) 式の一次独立な解であるから，

$$f(x,\xi) = a(\xi)\,\overline{g}(x,\xi) + b(\xi)\,g(x,\xi) \qquad (7)$$

$$\overline{f}(x,\xi) = -\overline{a}(\xi)\,g(x,\xi) + \overline{b}(\xi)\,\overline{g}(x,\xi) \qquad (8)$$

と表わすことが可能である。係数 $a(\xi)$，$b(\xi)$ は，

$$a(\xi) = W[f:g] \quad , \quad b(\xi) = W[\overline{g}:f] \qquad (9)$$

ここで $W[f:g] \equiv f_1 g_2 - f_2 g_1$ なる Wronskian を表わす。Jost 函数 (3)，(4) の定義より，$a(\zeta)$ ($\overline{a}(\zeta)$) は 上 (下) 半平面に解析接続可能であることがわかる。

$a(\zeta)$，$\overline{a}(\zeta)$ の零点は (1) 式の bound state を意味し，このとき，次の関係が成立する。

$$f(x,\zeta_n) = C_n\, g(x,\zeta_n) \quad \mathrm{Im}\,\zeta_n > 0 \quad n = 1, \cdots N_1 \qquad (10)$$

$$\overline{f}(x,\overline{\zeta}_m) = \overline{C}_m\, \overline{g}(x,\overline{\zeta}_m) \quad \mathrm{Im}\,\zeta_m < 0 \quad m = 1, \cdots, N_2 \qquad (11)$$

これらの組 $S = \{ a, \overline{a}, b, \overline{b}, \zeta_n, \overline{\zeta}_m, C_n, \overline{C}_m \}$ を，散乱データと呼ぶ。又，(1) 式より，次の関係があることがわかる。

$$a(\xi)\,\overline{a}(\xi) + b(\xi)\,\overline{b}(\xi) = 1 \qquad (12)$$

for real ξ

逆散乱問題によれば、S から Potential q, r をきめることは一意的である。[1]

§2. 保存量と散乱データの関係

Potential q, r をここでは特に、

$$(\partial_x^n q)\cdot(\partial_x^m r) \longrightarrow 0 \quad (\text{急減少}) \qquad \text{as } x\to\infty$$
$$n, m = 0, 1, 2, \cdots$$

とする。このとき $\xi\to$ 大 で次のような (1) 式の漸近解を考えることができる。

$$f_1(x,\xi) = \exp\left\{-i\xi x + \int_{-\infty}^{x} \Phi_1(s,t,\xi)\,ds\right\} \quad (13)$$
$$\longrightarrow a(\xi)\,e^{-i\xi x} \qquad \text{as} \quad x\to\infty$$

すなわち、

$$\ln a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(s,t,\xi)\,ds \qquad (14)$$

同様に、

$$\overline{f_2}(x,\xi) = -\exp\left\{i\xi x + \int_{-\infty}^{x} \Phi_2(s,t,\xi)\,ds\right\} \quad (15)$$
$$\longrightarrow -\overline{a}(\xi)\,e^{i\xi x} \qquad \text{as} \quad x\to\infty$$

$$\therefore \quad \ln \overline{a}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(s,t,\xi)\,ds \qquad (16)$$

一方、(2) 式より Φ_1, Φ_2 について、次式を得る

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(-A - \frac{B}{q}\Phi_1\right) = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(A - \frac{C}{r}\Phi_2\right) = 0 \qquad (18)$$

よって、(17)，(18)式の 第2項目の積分が零であるならば、(14)，(15)は保存量であることがわかる。 (13)式を(1)式に代入して、Potentialの項で保存量を表わすと、

$$\Phi_1(x,t,\xi) = \frac{1}{2i\xi}\left\{ \Phi_1^2 + q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\Phi_1\right) - qr \right\} \qquad (19)$$

これより、Φ_1 を ξ の逆巾で展開して

$$\Phi_1(x,t,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1^{(n)}(x,t)}{(2i\xi)^n} \qquad (20)$$

次の recursion formula を得る。

$$\phi_1^{(k+1)} = q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\phi_1^{(k)}\right) + \sum_{l=1}^{k-1}\phi_1^{(l)}\phi_1^{(k-l)} \qquad (21)$$

このとき保存量は、例えば、

$$I_1^{(1)} = -\int qr\,dx \;, \quad I_1^{(2)} = -\int r q_x\,dx \qquad (22)$$

$$I_1^{(3)} = \int (q^2r^2 - qr_{xx})\,dx, \quad I_1^{(4)} = \int (3q^2 r r_x - q r_{xxx})\,dx$$

$$\cdots\cdots \quad I_1^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(k)}(x,t)\,dx \qquad (23)$$

Φ_2 に関して同様に計算すると $I_1^{(k)} = I_2^{(k)}$ であることが、

ただちにわかる。又，(22)の積分が存在することは明らか。

§3 Hamiltonian System としての非線形方程式

次のような Hamiltonian System を定義する。

$$q_t = \{q, H\} \quad , \quad r_t = \{r, H\} \tag{24}$$

Hは，前節で求めた保存量 I によって表わされる。又，$\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket を表わし，次のように定義される。

$$\{u, v\} = i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\delta u}{\delta q}\cdot\frac{\delta v}{\delta r} - \frac{\delta u}{\delta r}\cdot\frac{\delta v}{\delta q} \right) + \left(\frac{\delta u}{\delta r^*}\cdot\frac{\delta v}{\delta q^*} - \frac{\delta u}{\delta q^*}\cdot\frac{\delta v}{\delta r^*} \right) \right] \tag{25}$$

ここで $\delta/\delta q$ は，Fréchet 微分を表わす。このとき，

$$\begin{aligned} &\{ q(x), r(x') \} = i\delta(x-x') \\ &\{ q(x), q(x') \} = \{ r(x), r(x') \} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

を満足し，q、r が canonical set をなすことがわかる。次に (24) を正準変換するが，その前に，(24) の形で与えられる非線形発展方程式のクラスを考えよう。

Class 1 ;　$H = -(I^{(3)} + I^{(3)*})$ (27)

とすると，(24) 式は

$$iq_t = 2rq^2 - q_{xx} \quad , \quad ir_t = -2qr^2 + r_{xx}$$

特に、$r = -q^*$ とおくと、

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0 \tag{28}$$

なる 非線形 Schrödinger 方程式をうる。

Class 2：
$$H = i(I_1^{(4)} - I_1^{(4)*}) \tag{29}$$

とすると、

$$q_t = 6rqq_x - q_{xxx} \quad , \quad r_t = 6qrr_x - r_{xxx}$$

i) $r = i, q = iu$ とおくと、

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{30}$$

なる Korteweg-de Vries 方程式をうる。

ii) $r = q = iv$ とおくと、

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{31}$$

なる 変形 Korteweg-de Vries 方程式をうる。

一般に、

$$H = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n I^{(n)} + \text{c.c}) \tag{32}$$

が考えられ、generalized KdV 方程式等が含まれていることが容易にわかる。

§4. 正準変換

散乱問題に依れば、potential q, r と散乱データ S の間には一対一の関係がある。そこで今、q, r system

から、散乱データの項への正準変換を考える。　ここで、Fréchet derivative を、一般性を失うことなしに、次のように定義する。

$$\frac{\delta f(x,\xi)}{\delta q(x)} \equiv \lim_{s\uparrow x} \frac{\delta f(x,\xi)}{\delta q(s)} \qquad (33)$$

この定義より、(9) 式から　a, b の q, r についての Fréchet 微分は、Jost 函数を用いて、(real ξ について)

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)} = f_2 g_2(x,\xi) \;, \quad \frac{\delta a(\xi)}{\delta r(x)} = -f_1 g_1(x,\xi) \quad (34)$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta q(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x,\xi) \;, \quad \frac{\delta b(\xi)}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x,\xi) \quad (35)$$

となる。　Poisson bracket　$\{a(\xi), b(\xi')\}$ は (25) より

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = i\int dx \left(f_2 g_2(x,\xi) f_1 \bar{g}_1(x,\xi') - f_1 g_1(x,\xi) f_2 \bar{g}_2(x,\xi') \right)$$

となる。　一方 (1) 式より、　$\xi=\xi_1$ のとき $u^{(1)}, u^{(2)}$、$\xi=\xi_2$ のとき、$v^{(1)}, v^{(2)}$ を任意の解の pair とするとき

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} v_2^{(1)} v_2^{(2)} - u_2^{(1)} u_2^{(2)} v_1^{(1)} v_1^{(2)}$$
$$= \rho \frac{i}{2(\xi_1-\xi_2)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u_1^{(1)} v_2^{(1)} - u_2^{(1)} v_1^{(1)} \right)\left(u_1^{(2)} v_2^{(2)} - u_2^{(2)} v_1^{(2)} \right) \right] \quad (36)$$

の関係がある。　このように Poisson bracket は、Jost 函数の漸近解のみで与えられる。　(36) を用いれば上式は

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')}a(\xi)b(\xi') + \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')}\lim_{x\to\infty} e^{2i(\xi-\xi')x} a(\xi')b(\xi)$$

ここで symbol $\mathcal{P}$ は主値を表わす。又、

$$\mathcal{P}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{i\xi x}}{\xi}\right) = i\pi\delta(\xi)$$

なる、超函数をつかって、

$$\{\ln a(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P}\left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')}\right) + \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi') \qquad (37)$$

を得る。同様にして、

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')} + \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln a(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \mathcal{P}\frac{1}{2(\xi-\xi')} - \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \mathcal{P}\left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')}\right) - \frac{i\pi}{2}\delta(\xi-\xi')$$

$$\{a(\xi), \bar{a}(\xi')\} = \{b(\xi), \bar{b}(\xi')\} = 0$$

を得る。これらより、

$$P_\xi = \ln|a(\xi)|^{-2} \quad \text{or} \quad \bar{P}_\xi = \ln|\bar{a}(\xi)|^{-2} \qquad (38)$$

$$Q_\xi = \frac{2}{\pi}\arg b(\xi) \quad \text{or} \quad \bar{Q}_\xi = -\frac{2}{\pi}\arg \bar{b}(\xi)$$

が canonical set をなすことが容易にわかる。すなわち、

$$\{P_\xi, Q_{\xi'}\} = \{\overline{P}_\xi, \overline{Q}_{\xi'}\} = -\delta(\xi-\xi')$$
$$\{P_\xi, \overline{P}_{\xi'}\} = \{Q_\xi, \overline{Q}_{\xi'}\} = 0 \qquad (39)$$

ここで、 P は integral になっていることに注意せよ。

bound state , $a(\zeta_n)=0$, についても 同様に計算できる。 特に $\delta\zeta_n/\delta q(x)$ には、摂動法を用いる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + i(\zeta+\delta\zeta)\varphi_1 = (q+\delta q\,\delta(x-z))\varphi_2 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} - i(\zeta+\delta\zeta)\varphi_2 = r\varphi_1 \end{cases}$$

なる. $q \to q+\delta q$ の摂動を受けた方程式を考え、波動函数 φ の連続性と、有界性をつかって、次式をうる。

$$\frac{\delta\zeta_n}{\delta q(x)} = -\frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)} f_2 g_2(x, \zeta_n) \qquad (40)$$

同様に、r について.

$$\frac{\delta\zeta_n}{\delta r(x)} = \frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)} f_1 g_1(x, \zeta_n) \qquad (41)$$

ここで $\dot{a}$ は ζ についての微分を意味する。 又、

$$\frac{\delta C_n}{\delta q(x)} = -f_2 \overline{g}_2(x, \zeta_n) \quad , \quad \frac{\delta C_n}{\delta r(x)} = f_1 \overline{g}_1(x, \zeta_n)$$

は、明らか。 これより Poisson bracket を計算して、(36)式 をつかうことで、次式を得る。

$$\{\xi_n, c_{n'}\} = 0 \qquad (n \neq n')$$

$$\{\xi_n, \xi_{n'}\} = \{c_n, c_{n'}\} = 0$$

$$\{\xi_n, c_n\} = \frac{1}{2} c_n$$

これらより、

$$P_n = \xi_n, \qquad Q_n = -2 \ln c_n \qquad (42)$$

が canonical set であることが容易にわかる。一方、$a(\xi_n)=0$ を考慮することで連続部分 ξ についての canonical set と、(42) とが commutative であることが示せる。又、$\bar{a}(\bar{\xi}_m)=0$ の部分についても全く、同様の結果を得る。

$$\bar{P}_m = \bar{\xi}_m, \qquad \bar{Q}_m = -2 \ln \bar{c}_m \qquad (42)'$$

更に、このような canonical set (38), (42) は散乱データ S に同値であることが証明できる。このようにして、散乱問題は q, r から P, Q への正準変換であると見ることができる。そして、正準変換は逆をもつことから、逆散乱問題も又、正準変換である。

§5 Canonical 変数による Hamiltonian の表現

(14) 式において、$a(\xi)$ は $|\xi| \to \infty$ で次のような漸近形をもつことがわかる。

$$a(\xi) \longrightarrow 1 \qquad \text{as} \qquad |\xi| \longrightarrow \infty$$

よって 次の展開が可能である。

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\xi^k} \qquad I_m\ \xi \geq 0 \qquad (44)$$

(22) 式と比較して、次式を得る。

$$I_k = (2i)^k C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln a(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi \qquad (45)$$

積分路は、上半平面にわたってとる。 $a(\xi)$ については、bound state 及び、漸近形を考慮して次式で表わせる。

$$a(\xi) = \hat{a}(\xi) \prod_{n=1}^{N_1} \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \qquad \hat{a}(\xi):\ \text{reduced function of } a(\xi)$$

$\hat{a}(\xi)$ は、上半平面で零点をもたない、$a(\xi)$ と同じ解析性をもつ函数である。 これをつかって (45) 式を計算すると

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_k I_1^{(k)} + c.c \\ &= -\alpha_k \frac{(2i)^k}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(\xi)|^2 \cdot \xi^{k-1} d\xi \\ &\quad + \alpha_k \frac{(2i)^k}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_1} \oint \ln \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \cdot \xi^{n-1} d\xi \end{aligned}$$

ここで、α_k は、k が偶数のとき純虚数、奇数で実数となるように選ぶ。 よって、P.Q で表わせば

$$H_1[P,Q] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int P_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{P_n^k - P_n^{*k}}{k} \right] \quad (46)$$

同様にして、

$$H_2[\overline{P},\overline{Q}] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int \overline{P}_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\overline{P}_m^k - \overline{P}_m^{*k}}{k} \right] \quad (47)$$

を得る。このように、P, Q 変数は action angle 型のものである。P, Q の t に関する action は次の Hamiltonian flow によって記述される。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta Q}, \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{\delta H}{\delta P} \qquad (48)$$

これより、この system が

$$p = \text{const.} \quad (\text{action variable}) \qquad (49)$$

であり、完全積分可能であることが分かる。特に、固有値 ζ_n は (48) ((24)) の Hamiltonian flow で不変である。

前にあげた、幾つかの例について具体的に、P, Q の action を求めてみると、

Class 1 $\quad H = -(I^{(3)} + I^{(3)*}), \ (\alpha_k = -1, \ k=3)$

非線形 Schrödinger 方程式

$\zeta_n = \overline{\zeta}_n^*$: time invariant.

$b(t,\xi) = \overline{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi) \exp(4i\xi^2 t)$

$C_n(t) = \overline{C}_n^*(t) = C_n(0) \exp(4i\zeta_n^2 t)$

Class 2 : $H = i\,(I^{(4)} - I^{(4)*})$ $\quad (\alpha_k = i\,,\ k = 4)$

i) K-dV 方程式

$\zeta_n = i\kappa_n$: time invariant $\kappa_n > 0$ real.

$$b(t,\xi) = -\overline{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi)\exp(8i\xi^3 t)$$

$$C_n(t) = -\overline{C}_n^*(t) = C_n(0)\exp(8\kappa_n^3 t)$$

ii) M-KdV 方程式

$\zeta_n = \overline{\zeta}_n^*$: time invariant

$$b(t,\xi) = \overline{b}^*(t,\xi) = b(0,\xi)\exp(8i\xi^3 t)$$

$$C_n(t) = \overline{C}_n^*(t) = C_n(0)\exp(8i\zeta_n^3 t)$$

これらは、よく知られた結果である。

References

1) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Phys. Rev. Lett., 31 (1973) 125

2) V. E. Zakharov and L. D. Faddeev; Funct. Anal. Appl., 5 (1971) 280

3) V. E. Zakharov and C. V. Manakov; Teoret. Matem. Fiz., 19 (1974) 332

(ここでの結果は、Prog. Theor. Phys. Vol 54 No.3 に掲載予定)